基于抽样检测与成本优化的产品生产过程决策研究

1 摘要

在现代制造业中，生产企业对零配件的抽样检测以及生产过程中的决策对企业的成本控制和利润优化起着至关重要的作用。本文针对某电子产品的生产过程，通过系统分析和数学建模，提出了优化的决策方案，以应对零配件和成品的检测、拆解、调换等关键环节中的挑战。

针对问题一，本文基于**假设检验**的方法，在 95% 和 90% 的置信水平下，对零配件进行简单随机抽样，分别评估零配件的次品率是否超出标称值。设计一种检测次数尽可能少的抽样方案作出接收或者拒收零配件的选择。**最终得到在 95% 置信度下，最小样本容量为 139，抽到 21 个次品，即拒收这批零件；在 90% 置信度下，最小样本容量为 98，抽到 5 个次品，即接收这批零件**。

针对问题二，本文通过建立**基于二项分布的成本估计算法**，结合**决策树**思想，对零配件检测、成品检测、拆解及调换策略进行了**蒙特卡洛模拟**计算。在此框架下，决策树用于系统化地分析和优化不同策略的组合，最终得到关于情况 1 的最佳决策方案为**检测零件 1 和 2，不检测成品，拆解不合格品**。其他情况下的最优决策方案详见论文正文。

在问题三中，本文将问题二扩展到多道工序和多个零配件的生产流程中，通过**合并半成品 1 和半成品 2 的决策组合**简化了模型, 降低了总方案数，并通过优化算法求解最优的生产调度和检测方案。得到最优决策组合为**零配件和成品均不检测，半成品均检测，不合格半成品 1 和 2 不拆解，不合格半成品 3 拆解，不合格成品不拆解，能够显著提高生产效率和经济效益**。

针对问题四，基于问题一中的假设检验方法，重新抽样确定了生产过程中的次品率，并基于新的次品率数据优化了问题二和三中的最优生产决策组合, 加入抽样检测的环节使得模型更加贴近实际，提高了模型在实际应用中的可操作性。结果详见问题四的结果分析部分。

关键词：二项分布，单边检测，蒙特卡洛模拟，双边检测，决策树，模拟，Z 检验

2 问题重述

2.1 问题背景

在企业生产产品的过程中，往往涉及到多零配件和多个生产阶段。企业购买的零配件存在一定次品率，零配件在装配过程中也存在一定概率出现不合格的成品。对于不合格的成品，企业可以选择直接丢弃，也可以选择进行拆解；进入用户手中的不合格品，企业将无条件给予更换，但这都将提升企业的生产成本。

为了优化生产过程，企业面临多个生产节点中的决策选择问题，包括如何进行抽样检测零配件以控制零配件的次品率、是否对零配件和成品进行检测、以及如何处理不合格成品等。为了达到在控制次品率的情况下获得最高的经济效益，企业需要建立数学模型，帮助其在生产过程中做出最优的决策，以降低成本、提高生产效率，并确保产品质量达到市场要求。

2.2 问题提出

问题一： 需要在不同置信水平下判断零配件的次品率是否超过标称值，设计一种检测次数尽可能少的抽样方案作出接收或者拒收零配件的选择。

问题二： 在零配件存在不同成本和次品率的情况下，针对企业生产过程中的四个阶段，做出能获得最大生产利润的生产决策。

问题三： 对存在多道工序和多个零配件的情况下，分析在各个决策点下不同的成本和次品率，做出能获得最大生产利润的生产决策。

问题四： 当零配件、半成品、成品出现次品的概率都由抽样检测的方法产生，在该情况下重新考虑问题二和问题三。

3 问题分析

问题一： 需要在某规定置信度下判断零配件的次品率是否超过标称值，并要求设计的抽样方案检测次数尽可能少，所以要将样本量数量控制到最小，以降低抽样成本。本问是非常典型的**假设检验**问题，且零件是否合格的概率分布符合二**项式分布**，因此可以采用二项检验或正态近似来进行假设检验。

问题二： 可以采用概率计算或者模拟的方式进行求解。对于生产阶段中存在的四个决策点，可以得到不同决策排列组合下的 16 种决策组合。针对题目表格中的六种不同情况，显然在不同的决策组合中也会有不同的利润表现。由于可以对不合格成品进行拆解及再装配，

因此需要考虑的成本构成是非常复杂的，要建立完善的模拟过程模型在不同情况下遍历找到最佳答案。

问题三：本问题是一个多工序和多零配件的生产流程。较于问题二，在生产阶段中出现了更多的决策点，决策排列组合的总方案数大幅度增加。如何通过观察题目表格中给出的各零配件和生产步骤之间的关系，从而进行简化模型，降低总方案数是解决该题的关键之处。同时，要灵活运用第二题所用的方法至本题的求解中。

问题四：应当结合问题一的分析和建模过程。通过问题一中使用的抽样检测方案，可以重新确定次品率，使问题二和问题三中的情况更加符合生活实际。

4 模型假设与符号说明

4.1 模型假设

- 假设 1：拆解过程不会对零配件造成损坏，拆解后的零配件状态与零件装配之前保持不变。
- 假设 2：生产过程中买进的各零配件数量相同。
- 假设 3：半成品、成品的次品率是将合格零配件/半成品因装配产生的产品次品率。
- 假设 4：不合格成品中的调换损失是指除调换次品之外的损失。
- 假设 5：题目中涉及到的各个费用的单位均为元每件。

4.2 符号说明

符号	意义
α	显著性水平
μ	次品率的总体均值
σ	次品率的总体标准差
H_0	原假设
H_1	备择假设
n	样本量
Z	正态检验统计量
$\widehat{P}$	样本次品率
P_0	标称值
$N_i, \quad i=1,2,3,\ldots,8$	零件 i 的数量
$C_i, \quad i=1,2,3,\ldots,8$	零件 i 的检测成本
C_{t_i}	检测单个零件 i 的成本
C_{d_e}	拆解单个零件 i 的成本
C_e	组装单个成品的成本
C_{s_e}	调换一个不合格成品的损失
C_h	检测成品的成本
C_z	装配成本
C_d	拆解成本
C_s	调换损失
B_i	若零件 i 通过检测，$B_i=1$；否则 $B_i=0$
F	若成品通过检测，则 $F=1$；否则 $F=0$
D	若对不合格品进行拆解，则 $D=1$；否则 $D=0$
m	成品的数量
C	总成本
W	总收入

表 1: 符号说明

5 问题一模型的建立与求解

5.1 模型准备

由问题一题面可知，本问需要设计一个检测数量尽可能少的抽样检测方案，使得在某置信水平下判断零配件是否超过标称值，并作出相应的接受或者拒收选择。为了实现这一目标，本问选择**假设检验**的方法。

单边假设检验是假设检验的一种，它只在一个方向上对假设进行检验。如果检验统计量落在拒绝域的一侧，那么原假设被拒绝。而双边假设检验在两个方向上对假设进行检验。如果检验统计量落在拒绝域的两侧，那么原假设被拒绝。根据题目，我们只需要选择是否接受

零配件，属于**单边假设检验**。

5.2 模型建立

建立假设

由题目给出的标称值为 10%，可以给出对应的原假设 H_0 和备择假设 H_1:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu \leq 0.1 \\
H_1 &: \mu > 0.1
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中，μ 为次品率的总体均值。

在**情况** 1 中，我们希望拒收零配件，意味着在 95% 置信水平下拒绝 H_0, 即认为次品率大于 10%。

在**情况** 2 中，我们希望接受零配件，意味着在 90% 置信水平下接受 H_0, 即认为次品率小于 10%。

建立统计模型

针对每个零配件，只存在合格或不合格两种可能，即检验零配件的过程符合进行 n 次独立伯努利试验的情况，可以用**二项式分布**描述。设样本量为 n，X 为抽样中次品的数量，则 X 服从参数为 n 和 P 的二项式分布:

$$
X \sim Bin(n, P) \tag{2}
$$

在样本量 n 比较大的情况下，可以使用**正态分布来近似二项分布**。这种近似是基于中心极限定理，该定理指出，如果样本量足够大，那么独立随机变量的和平均值将趋向于正态分布，即使原始变量本身不是正态分布的。此时，二项分布可以近似为正态分布:

$$
\widehat{P} \sim N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right) \tag{3}
$$

式中 $\widehat{P}$ 为样本次品率。将此式标准化后，可以得到正态分布的检验统计量 Z:

$$
Z = \frac{\widehat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 \cdot (1 - P_0)}{n}}} \tag{4}
$$

设定置信区间

根据置信水平的不同，利用正态分布的累积概率计算相应的检验统计量 Z:

对于 95% 的置信水平，Z 值为 1.9600，对于 90% 的置信水平，Z 值为 1.6499。

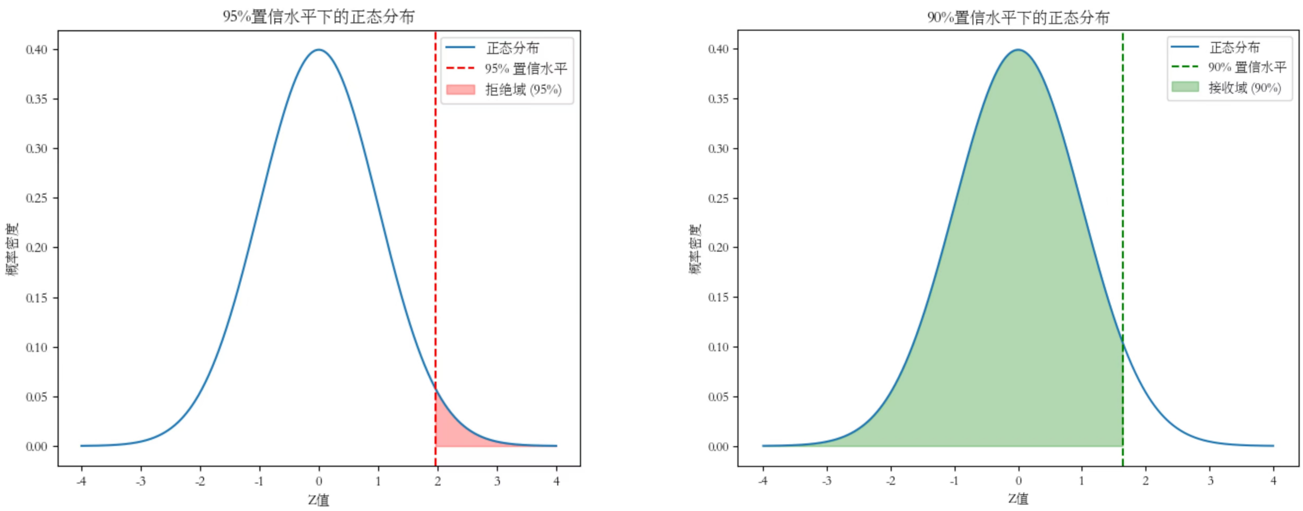


图 1: 置信区间示意图

确定样本量

在情况 1 中，95% 的置信度下，假设次品率大于 10%，我们需要拒收这批零件，可以根据公式推导出最小样本容量 n_1:

$$\begin{gathered}\frac{\widehat{P}-P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0\cdot(1-P_0)}{n_1}}}\geq Z_{0.95}\\ \text{即}\quad n_1\geq\frac{P_0\cdot(1-P_0)}{\left(\dfrac{\widehat{P}-P_0}{Z_{0.95}}\right)^2}\end{gathered}\tag{5}$$

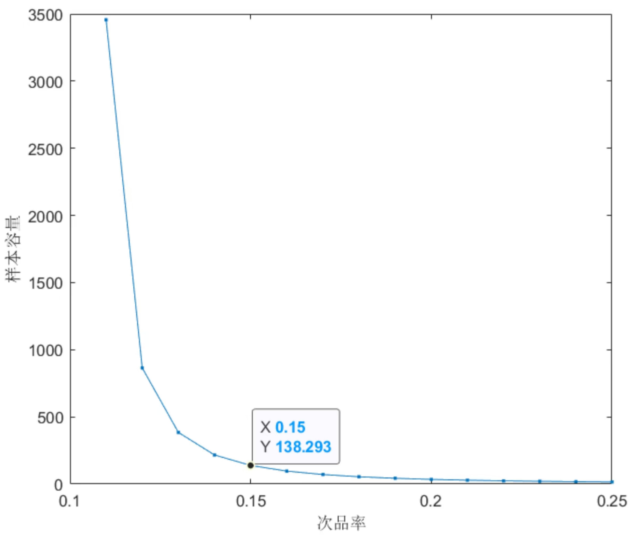
其中，$\widehat{P}$ 为样品次品率，P_0 为标称值。同样地，针对情况 2，也可以到处对应的最小样

本容量 n_2:

$$\frac{\widehat{P}-P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0\cdot(1-P_0)}{n_2}}}\leq Z_{0.90}$$
$$\text{即}\quad n_2\leq\frac{P_0\cdot(1-P_0)}{\left(\dfrac{\widehat{P}-P_0}{Z_{0.90}}\right)^2} \tag{6}$$

5.3 模型求解

观察最小样本容量 n_1 和 n_2 表达式，可知式中只有样本次品率 $\widehat{P}$ 为未知，对于误差 E 假设为 5%。此时可以从小到大枚举样本次品率，找到样本容量最小情况为最优方案。



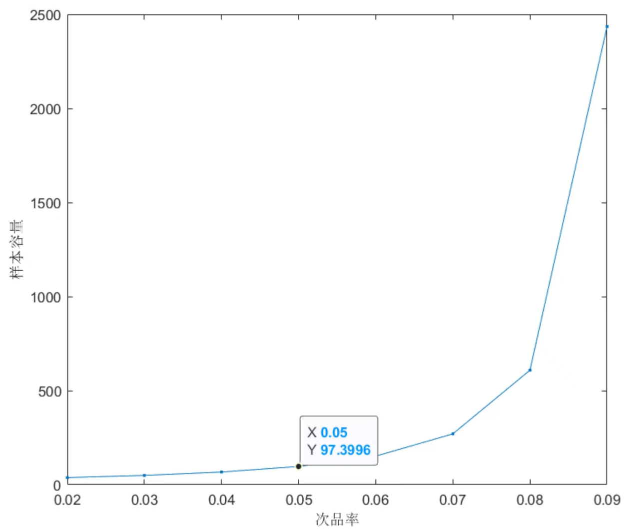


图 2: 情况一、二样本容量和样本次品率关系图

情况 1 中，在 95% 的置信率下，最小样本容量为 139，抽到 21 个次品，拒收这批零配件。

情况 2 中，在 90% 的置信率下，最小样本容量为 98，抽到 5 个次品，接收这批零配件。

6 问题二模型的建立与求解

6.1 模型准备

问题二描述了企业生产某成品时涉及的四个生产阶段，分别为：零配件的检测、成品的检测、对检测出的不合格成品的拆解、用户退回不合格品的调换及退回不合格品的拆解。

问题二需要我们对以上四个生产阶段进行决策并建立数学模型，目的是获得最大利润。由问题一可知，零配件是否合格的概率符合**二项式分布**，因此，本问采用**基于二项分布的成本估算法**对问题进行建模。

6.2 模型建立

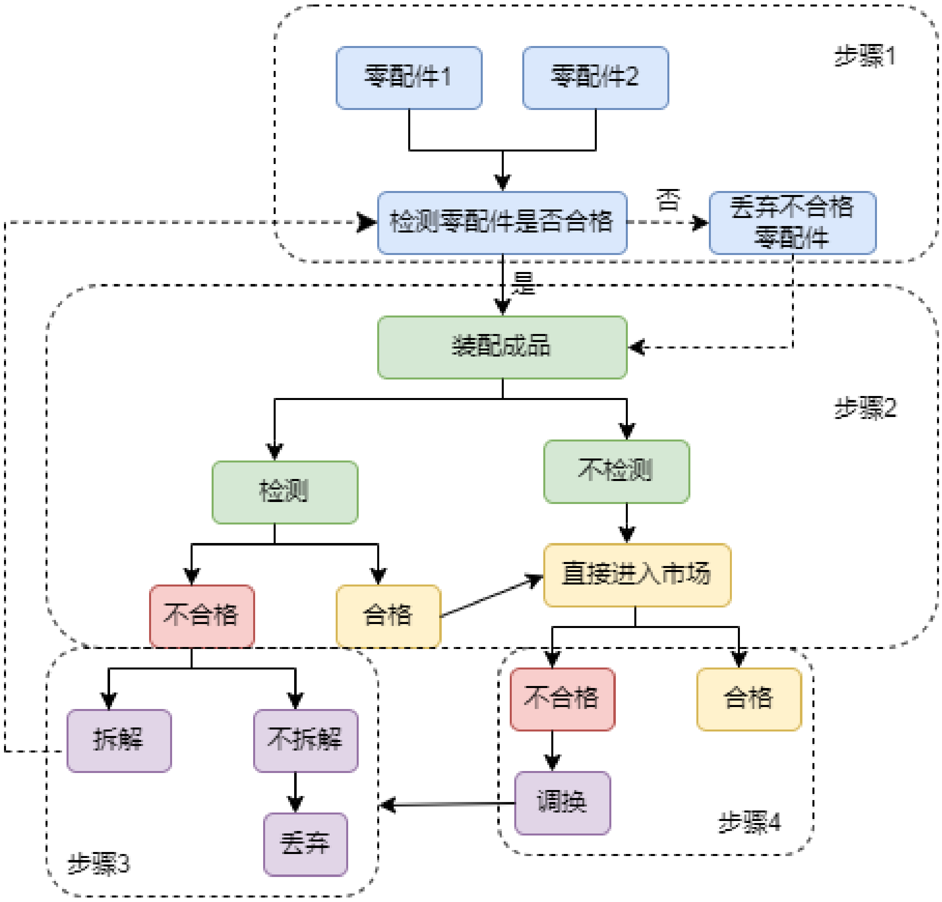


图 3: 四个生产步骤

题目给出的四个生产步骤可以转化为图 3 所示的示意图。

步骤 1：零配件检测环节

由于零配件是否合格的概率符合二项式，因此可以导出检验零配件 1 和 2 的检验总成本 C_1 和 C_2 公式

$$
\begin{aligned}
C_1 &= B_1 \cdot C_{t_1} \cdot N_1 \\
C_2 &= B_2 \cdot C_{t_2} \cdot N_2
\end{aligned} \tag{7}
$$

式中，B_1 和 B_2 是布尔变量，当选择检测当前零件时为 1，不检测则为 0；C_{t_1} 和 C_{t_2} 则是检测单个零件 1 或 2 的检测成本；N_1 和 N_2 为零配件 1 和零配件 2 的数量。

检测后，不合格的零件直接被丢弃，会造成零配件 1 和 2 个数变化:

$$N_1' = \begin{cases} B_1 \cdot N_1(1-P_1), & B_1 = 1 \\ (1-B_1)N_1, & B_1 = 0 \end{cases} \quad N_2' = \begin{cases} B_2 \cdot N_2(1-P_2), & B_2 = 1 \\ (1-B_2)N_2, & B_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

其中，P_1 和 P_2 是零配件 1 和 2 出现次品的概率。

步骤 2：成品检测环节

成品由一个零配件 1 和一个零配件 2 构成，所以成品的数量 m 取决于零配件 1 和 2 中数量少的那个，于是可以得到

$$m = min(N_1', N_2') \tag{9}$$

成品总数量 m 与装配单个成品的成本 C_e 相乘可以得到装配成品的总成本 C_z:

$$C_z = m \cdot C_e \tag{10}$$

对所有检测的成品，可以得到检测总成本 C_j:

$$C_j = B_3 \cdot m \cdot C_h \tag{11}$$

式中，C_h 为检测一个成品的成本，B_3 为布尔量，如果对不合格品进行检测，则 $B_3 = 1$，不检测为 0。

设零配件 1 和 2 都合格，但装配后成品出现次品的概率是 P_3；P_1 和 P_2 是零配件 1 和 2 出现次品的概率。可以得到最终成品出现次品的概率有以下四种情况:

$$P_{次} \begin{cases} P_3 \cdot B_1 \cdot B_2, & B_1 = 1, B_2 = 1 \\ (1-B_1)P_1 + (1-B_2)P_2 + (1-P_2) \cdot P_3, & B_1 = 1, B_2 = 0 \\ (1-B_1)P_1 + (1-B_2)P_2 + (1-P_1) \cdot P_3, & B_1 = 0, B_2 = 1 \\ (1-B_1)P_1 + (1-B_2)P_2 - (1-B_1)(1-B_2)P_1 \cdot P_2 + (1-P_1) \cdot (1-P_2) \cdot P_3, & B_1 = 0, B_2 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

步骤 3：拆解环节

需要拆解的成品由成品检测环节中检测到的不合格成品 $(B_3 \cdot P_{次} \cdot n)$ 和进入市场后被用户退回的不合格成品 $((1-B_3) \cdot P_{次} \cdot n)$ 以及拆解重新组装出的成品中出现的不合格品 $(P_{次}^2 \cdot n)$

一起构成了全部需要拆解的成品总量，可以得到：

$$N_{拆} = B_4(B_3 \cdot P_{次} \cdot n + (1 - B_3) \cdot P_{次} \cdot n + P_{次}^2 \cdot n) \tag{13}$$

式中，B_4 为布尔量，如果对所有需要拆解的不合格成品进行拆解，则 $B_4 = 1$，不拆解为 0。

设拆解费用包含成品检测费、成品拆解费，拆解后零件检查费和零件重新装配费，于是得到拆解成本 C_d 为：

$$C_d = B_4(N_{拆} \cdot C_{d_e} + (1-B_1) \cdot C_{t_1} \cdot P_{次} \cdot m + (1-B_2) \cdot C_{t_2} \cdot P_{次} \cdot m + C_e \cdot P_{次} \cdot m + B_3 \cdot C_h \cdot P_{次} \cdot m) \tag{14}$$

步骤 4：调换环节

如果对装配好的成品不进行检测，则成品全部进入市场，此时，需要对顾客手中拿到的次品进行调换。需要调换的数量包括初次到达顾客手中的次品数以及不合格品调换回后进行拆解重装后再次出现的不合格次品（因为不进行成品检测，所以仍然会到达顾客手中）。可以得到调换数量 $N_{调}$：

$$N_{调} = (1 - B_3)(P_{次} \cdot m + B_4 \cdot P_{次}^2 \cdot m) \tag{15}$$

则，调换损失为 $C_s = N_{调} \cdot C_{s_e}$，$C_{s_e}$ 为调换单个不合格成品的造成的损失。

综合

总收入：

$$W = 56 \times [m \cdot (1 - P_{次}) + B_4 \cdot (1 - P_{次}) \cdot P_{次} \cdot m - (1 - B_3) \cdot m \cdot P_{次}] \tag{16}$$

收入 = 56×（售出合格成品数量-给顾客次品数量 + 拆解重组的成品数量）

总成本：

$$C = C_1 + C_2 + C_j + C_z + C_d + C_s \tag{17}$$

6.3 模型优化

经过分析，第一次小成本拆解重新装配成正品可以获利，但多次循环导致**在剩余的未装配零配件总数中，不合格零配件的比例不断上升**，此时继续进行重复的装配成成品再拆解是没有意义的。所以我们需要设置一个合适的次品零件比来终止循环并使得利润最大。由于次品零件比是动态变化的，于是我们需要模拟生产流程，以求出更好的决策方案。

6.3.1 优化模型的建立

建立决策矩阵

由于问题二仅有 4 个决策点，所以可以把全部的决策组合列举出来，使用二进制数来表示不同的决策组合。在这个模型中，决策点包括是否对零件 1 和零件 2 进行检测，是否对成品进行检测，以及是否对不合格的成品进行拆解。每种决策组合用一个二进制位表示，其中 1 表示执行该操作，0 表示不执行。计算利润，求得利润最大的决策。

模拟生产过程

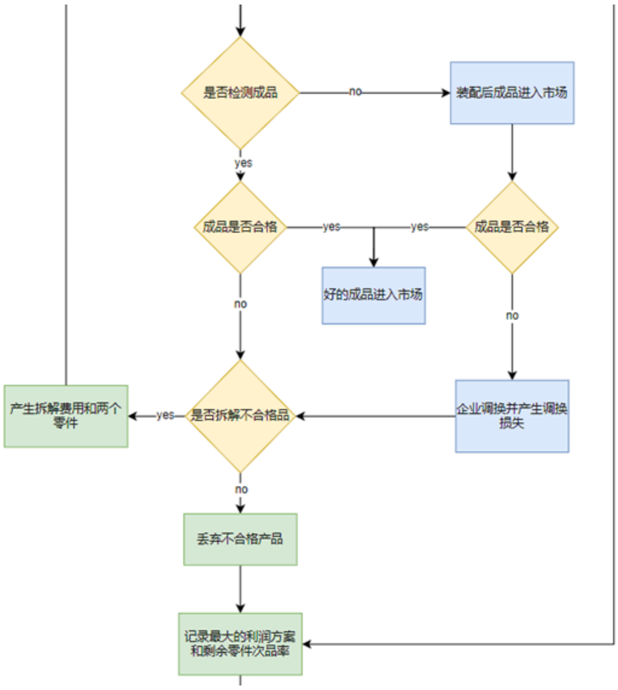


图 4: 关键步骤流程图

完整流程图太大，详见附件，这里只展示关键流程。

目标函数： 最大化利润

$$Max \quad Profit = W - C \tag{18}$$

其中：$W = 56 \times m_g$，为合格成品的销售收入；成本 C 由零件检测成本、装配成本、成品检测成本、拆解成本、调换损失等费用的总和。

6.3.2 优化模型的求解

1. 评估各决策下的成本和收益

对于每一个决策：根据决策变量的不同，计算零件和成品的总成本；计算装配后的成品数量，评估该决策下的总利润。

2. 临界次品零件比优化

设定临界次品零件比 c_i，遍历不同的临界次品零件比 c_i，选择能最大化利润的次品零件比。

3. 最优解选择

对所有策略进行求解，找到利润最大化的决策方案。输出最优方案的检测与装配策略。

6.4 结果分析

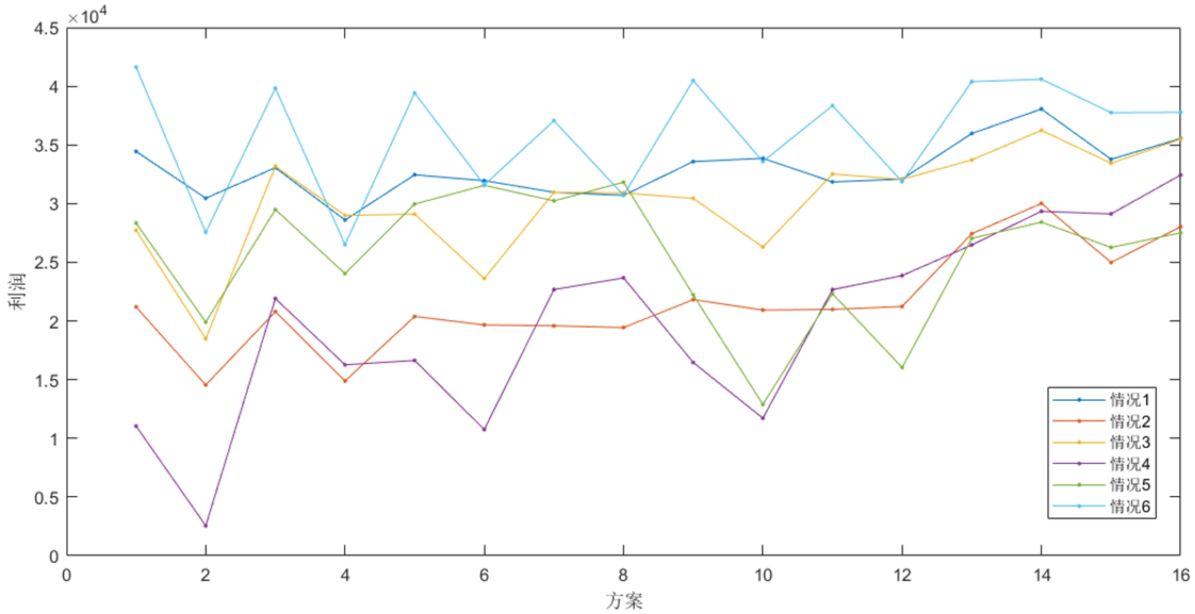


图 5: 所有情况的决策方案及对应的利润图

决策方案如下表：

表 2: 决策方案表

情况	检测零件 1	检测零件 2	检测成品	拆解不合格品	次品零件比	利润
情况 1	1	1	0	1	0.82	38034
情况 2	1	1	0	1	0.75	29792
情况 3	1	1	0	1	0.65	36238
情况 4	1	1	1	1	0.87	32404
情况 5	0	1	1	1	0.82	31938
情况 6	0	0	0	0	0.56	41684

注：1 表示执行相应操作，0 表示不执行相应操作。这里的次品零件比是利润最大时的次品零件比

决策分析：

情况 1：若两个零件均检测，则得到的一定为好的零件，成品中出现次品率只可能由装配过程导致，得到的成品中次品占少数，因此可以不进行检测。用户使用后将次品退回，退回的不合格成品拆解后得到的一定为合格零件，可以再次进行组装。得到最终方案为**零件 1 和 2 检测，成品不检测，不合格成品拆解**。

情况 2：情况 2 相较于情况 1 只是零件和成品的次品率提升，因此零件检测更有价值，在零件均检测的情况下，成品中次品依旧占比较少。虽然成品的次品率也有提升，但仍是不检测成品，用户使用后将次品退回处理所需成本更小。得到最终方案为**零件 1 和 2 检测，成品不检测，不合格成品拆解**。

情况 3：情况 3 相较于情况 1 只是不合格成品调换损失的提升，由于次品率较低，在零件均检测的情况下，成品中次品依旧占比较少。虽然不合格成品调换损失提升，但仍是不检测成品，用户使用后将次品退回处理所需成本更小。得到最终方案为**零件 1 和 2 检测，成品不检测，不合格成品拆解**。

情况 4：情况 4 相较于情况 3 零件和成品的次品率均提升，且零件和成品的检测成本均下降，零件检测将更有价值。由于次品率升高，在零件均检测的情况下，成品中次品占比增加，因此在不合格成品调换损失的较高的情况下，不检测成品的成本会有所上升，又因为成品的检测成本也下降，因此对成品也进行检测的成本会更低。得到最终方案为**零件 1 和 2 以及成品均检测，不合格成品拆解**。

情况 5：情况 5 相较于情况 1 零件 2 的次品率提升，零件 2 和成品的检测成本均下降，调换损失小幅增加，但零件 1 的检测成本大幅增加，因此零件 1 的检测价值大幅下降且零件 2 的检测价值升高。由于零件 1 不检测，成品中次品占比会增加，因此在不合格成品调换损失成本有增加的情况下，不检测成品的成本会有所上升，又因为成品的检测成本也下降，因此对成品也进行检测的成本会更低。得到最终方案为**零件 1 不检测，零件 2 以及成品均检测，不合格成品拆解**。

情况 6：情况 6 相较于情况 1 零件 1 和 2 以及成品的次品率均降低，但是不合格成品的拆解费用大幅增加，次品率均较低的情况下，零件和成品的检测价值均降低。因此即使零件和成品均不检测，最终成品中次品占比依旧较小，用户使用后将次品退回处理所需成本更小，又因为不合格成品的拆解费用大幅增加，而拆解后再次装配的成品有可能还是次品，因此不合格成品被退回后直接丢弃更为合理。得到最终方案为**零件 1 和 2 以及成品均不检测，不合格成品不拆解**。

7 问题三模型的建立与求解

7.1 模型简化

半成品 1 由零配件 1，2，3 装配，半成品 2 由零配件 4，5，6 装配，其中**零配件 1 和零配件 4、零配件 2 和零配件 5、零配件 3 和零配件 6 的次品率和检测成本完全一致**，由于零配件的购买成本是单独计算的，因此可以看作半成品 1 和半成品 2 均由零配件 1，2，3 或零配件 4，5，6 装配，即半成品 1 的最佳决策方案也是半成品 2 的最佳决策方案。

7.2 模型建立

问题三存在多道工序和多个零配件，将针对以下 5 个决策点进行决策建模：是否检测各个零件；是否检测各个半成品；是否拆解不合格半成品；是否检测成品；是否拆解不合格成品。

由于模型进行了简化，方案数由原来的 6 万多种降到了 2 千多种，故依旧可以采用**基于二项分布的成本估算法**枚举每种方案以求出最大的利润。

7.2.1 成本模型的建立

零配件检测环节

模型简化后，因认为零配件 1、2、3 与零配件 4、5、6 的生产最佳决策方案是相同的，可以认为零配件种类由原先的 8 种减少为 5 种。

可以得到对所有零配件的总检测费为:

$$C_j = \sum_{i=1}^{3} B_i \cdot C_{j_i} \cdot N_i + \sum_{i=7}^{8} B_i \cdot C_{j_i} \cdot N_i \tag{19}$$

式中，B_i 为布尔变量，表示是否对该种零配件进行检测，检测则 $B_i = 1$，不检测则为 0；C_{j_i} 是检测单个零件 i 所的成本；N_i 为零件 i 的总数。

检测后，不合格的零配件直接丢弃，会造成零配件数的变化：

$$N_i' = \begin{cases} N_i \cdot (1 - P') \cdot B_i, & B_i = 1 \\ N_i \cdot (1 - B_i), & B_i = 0 \end{cases} \tag{20}$$

式中，P' 为次品率，本问的次品率恒为 10%。

半成品装配环节

模型简化后，因认为零配件 1、2、3 与零配件 4、5、6 的生产最佳决策方案是相同的，因此可将题中半成品 2 的数量加入至半成品 1 中进行计算。与问题二类似地，半成品由多个零配件构成，所以半成品的数量取决于零配件中数量最少的那个，于是可以得到

$$\begin{aligned} &\text{半成品 1 数量：} N_{b_1} = min(N_1', N_2', N_3') \\ &\text{半成品 3 数量：} N_{b_3} = min(N_7', N_8') \end{aligned} \tag{21}$$

由半成品数量和装配成本 C_e，可以得到半成品装配总成本 C_{bz} 为

$$C_{bz} = N_{b_1} \cdot C_e \times 2 + N_{b_3} \cdot C_e \tag{22}$$

半成品检测环节

对所有检测的半成品，可以得到半成品的总检测成本 C_{j_1} 为

$$C_{j_1} = 2 \times B_6 \cdot N_{b_1} \cdot C_{bj} + B_7 \cdot N_{b_3} \cdot C_{bj} \tag{23}$$

式中，B_6 和 B_7 为布尔量，表示是否对半成品 1 和 3 进行检测，检测为 1，不检测则为 0；C_{bj} 为单个半成品的检测成本。

零配件是否检测影响半成品的合格率，我们可以得到半成品 1 的合格率与半成品 3 的合格率分别为

$$\begin{aligned} P_{\text{合 } 1} &= (1 - P')^{4 - \sum_{i=1}^{3} x_i} \\ P_{\text{合 } 3} &= (1 - P')^{3 - \sum_{i=7}^{8} x_i} \end{aligned} \tag{24}$$

半成品拆解环节

由于半成品可以不断地重复进行装配和拆解，我们设定没有半成品可拆时为循环终止条件，即可拆解的半成品个数小于 1 时结束，可以得到半成品 1 的拆解数量 $N_{\text{拆 } 1}$ 为

$$N_{\text{拆 } 1} = B_8 \left[B_6 \cdot (1 - P_{\text{合 } 1}) \cdot N_{b_1} + (1 - P_{\text{合 } 1})^2 \cdot N_{b_1} + (1 - P_{\text{合 } 1})^3 \cdot N_{b_1} + \cdots + (1 - P_{\text{合 } 1})^n \cdot N_{b_1} \right] \tag{25}$$

半成品 1 的拆解成本 C_{d_1} 为

$$C_{d_1} = B_8[B_6 \cdot (1 - P_{合\ 1}) \cdot N_{b_1} \cdot C_{d_e} + (1 - P_{合\ 1})^2 \cdot N_{b_1} \cdot (C_{d_e} + C_j + C_{bz} + C_{j1}) + \cdots + (1 - P_{合\ 1})^n \cdot N_{b_1} \cdot (C_{d_e} + C_j + C_{bz} + C_{j1})] \tag{26}$$

同样的，半成品 3 的相关拆解公式形如上式。

成品装配环节

与装配半成品类似地，成品由多个半成品构成，所以成品数量 N 取决于半成品中数量最少的那个，但此时半成品的数量应该是减去被拆解的半成品数后的数量：

$$N = min(N_{b_1} - N_{拆\ 1}, N_{b_3} - N_{拆\ 3}) \tag{27}$$

由成品数量和装配成本，可以得到成品的装配成本 C_z 为：

$$C_z = N \cdot C_e \tag{28}$$

因为在半成品合格的情况下，仍然存在成品不合格的情况，在不同的生产决策下，可以导出不同的成本合格率为

$$P_{成} \begin{cases} B_6 \cdot B_7 \cdot P', & B_6 = 1, B_7 = 1 \\ P_{合\ 1} \cdot P' \cdot (1 - B_6) \cdot B_7, & B_6 = 0, B_7 = 1 \\ P_{合\ 2} \cdot P' \cdot (1 - B_7) \cdot B_6, & B_6 = 1, B_7 = 0 \\ P_{合\ 1} \cdot P_{合\ 2} \cdot P' \cdot (1 - B_6) \cdot (1 - B_7), & B_6 = 0, B_7 = 0 \end{cases} \tag{29}$$

成品检测环节

成品的数量 N 和检测成品的成本 C_j 可以导出成品检测的总成本 C_h：

$$C_h = N \cdot C_j \cdot B_{10} \tag{30}$$

式中，B_{10} 为布尔变量，表示是否对该成品进行检测，检测为 1，不检测为 0。

成品拆解环节

原理与半成品拆解相同，不再赘述，得到成品拆解数量 $N_{拆3}$：

$$N_{拆3} = B_{11} \cdot \left[B_{10} \cdot (1 - P_{成}) \cdot N + (1 - P_{成})^2 \cdot N + \cdots + (1 - P_{成})^n \cdot N\right] \tag{31}$$

类似于半成品的拆解成本，我们同样可以得到成品的拆解成本 C_d 为：

$$\begin{aligned} C_d = B_{11}[B_{10} \cdot (1 - P_{成}) \cdot N \cdot C_{d_e} + (1 - P_{成})^2 \cdot N \cdot (C_{d_e} + C_h + C_z + C_{j_1}) + \\ \cdots + (1 - P_{成})^n \cdot N \cdot (C_{d_e} + C_h + C_z + C_{j_1})] \end{aligned} \tag{32}$$

不合格成品调换环节

我们可以将顾客收到不合格成品并要求调换的行为视为一种人为检测，于是，其原理等同于成品检测环节。于是得到不合格成品的调换数量和调换成本：

$$\begin{aligned} N_{调} = (1 - B_{10}) \cdot \left[(1 - P_{成}) \cdot N + (1 - P_{成})^2 \cdot N + \cdots + (1 - P_{成})^n \cdot N\right] \\ C_s = (1 - B_{10}) \cdot [B_{10} \cdot (1 - P_{成}) \cdot N \cdot C_s + (1 - P_{成})^2 \cdot N \cdot (C_{s_e} + C_h + C_z + C_{j_1}) + \\ \cdots + (1 - P_{成})^n \cdot N \cdot (C_{s_e} C_h + C_z + C_{j_1})] \end{aligned} \tag{33}$$

模型汇总

总收入：

$$W = 200 \cdot (N - B_{10} \cdot N_{拆} - (1 - B_{10}) \cdot N_{调}) \tag{34}$$

总成本：

$$C = C_j + C_{bz} + C_{j1} + C_{d_1} + C_{d_3} + C_z + C_h + C_d + C_s \tag{35}$$

目标函数：

$$Max \quad Profit = W - C \tag{36}$$

7.3 模型求解

针对 2 道工序，8 个零件的情况，以下是最优的具体决策方案

是否检测零件 1	是否检测零件 2	是否检测零件 3	是否检测零件 4
0	0	0	0
是否检测零件 5	是否检测零件 6	是否检测零件 7	是否检测零件 8
0	0	0	0
是否检测半成品 1	是否检测半成品 2	是否检测半成品 3	是否拆解半成品 1
1	1	1	0
是否拆解半成品 2	是否拆解半成品 3	是否检测成品	是否拆解成品
0	1	0	0

注：1 表示执行相应操作，0 表示不执行相应操作。

表 3: 最优决策方案

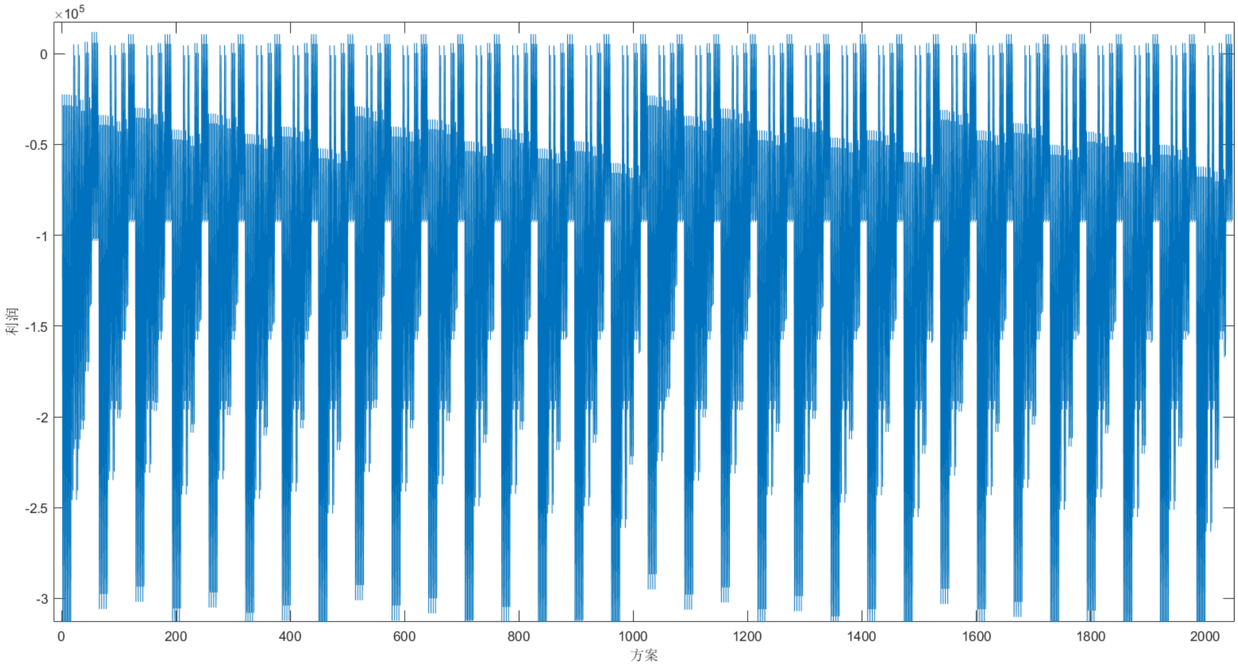


图 6: 所有方案与利润关系图

7.4 结果分析

零配件的次品率均较低，进行装配的零件大部分为好零件，所以零件不进行检测，装配的半成品的次品率与零配件的次品率相同，但是由于零件可能有次品，所以最终得到的半成品实际次品占比要大于次品率，因此若不检测半成品，则成品的实际次品占比也会更多，成品的调换损失较大，因此要尽量避免进入市场的成品中出现次品，又因为成品的检测费用和拆解费用均高于半成品，所以对半成品进行检测，又因为半成品 1 和 2 装配需要 3 个零件，

若进行拆解处理需要的成本会较高，而半成品 3 则只需要 2 个零件进行装配，拆解处理价值更高，因此只对半成品 3 进行拆解，得到**最终方案为零配件和成品均不检测，半成品均检测，不合格半成品 1 和 2 不拆解，不合格半成品 3 拆解，不合格成品不拆解**。

7.5 模型敏感性分析

改变模型参数，检测模型决策是否发生变化，从而验证模型的敏感性。零件次品率提高到 30%，模型决策发生变化，为

0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1

当零件次品率越高，其拆解后获利的概率越大，决策越倾向于拆解。后续适当改变参数，观察模型的决策变化，以确保模型敏感性。

8 问题四模型的建立与求解

8.1 模型建立

本问需要通过抽样检测方法重新确定问题二、问题三中零配件、半成品和成品的次品率，我们**假设问题四中通过抽样得到的次品率在零配件、半成品和成品之间保持一致**。

确定抽样方案

抽样方案一般包括抽样数量和抽样方式两部分。

抽样数量：根据样本量计算公式确定抽取的样本数量 n。样本数量应足够大，以便可以对总体次品率进行合理的估计。

抽样方式：常见的抽样方式有简单随机抽样、分层抽样和系统抽样。对于生产过程中零件的检测，通常使用**简单随机抽样**，即从所有零件中随机抽取样本。

计算样本次品率

对于统计量计算公式：

$$Z = \frac{\widehat{P} - P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}} \tag{37}$$

我们对每个抽取的样本进行质量检测，判断其是否为次品。记录样本中的次品数量 x。此时可以计算样品次品率为为

$$\widehat{P} = \frac{x}{n} \tag{38}$$

计算次品率的置信区间

通过计算次品率的置信区间，可以得出次品率估计值的上下限，从而提供更可靠的估计。根据样本次品率 $\widehat{P}$，可以使用二项分布的正态近似或直接使用二项分布来确定置信区间。

当样本量较大时，正态分布近似于二项分布：

$$\text{置信区间} = \widehat{P} \pm z \times \sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}} \tag{39}$$

式中，z 是标准正态分布的分位数，决定置信水平。

当样本量较小时，可以使用 Wilson Score 区间来计算置信区间。这是另一种常用的方法，特别适用于小样本量的情况：

$$\text{Wilson 区间} = \frac{\hat{p} + \frac{z^2}{2n} \pm z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{z^2}{4n^2}}}{1 + \frac{z^2}{n}} \tag{40}$$

检验估计值的可靠性

在置信区间内随机选取一个次品率后，使用 Z 检验来检测抽样结果的统计显著性，以判断估计的次品率是否合理。

为了检验某批产品的次品率是否与已知的总体次品率 P_0 相等，由于我们需要确定参数是否显著不同于特定值，而不关心参数是大于还是小于该值，因此采用双边检验。

具体假设为:

$$\begin{gathered}\textbf{原假设} H_0 : \mu = \mu_0 \\ \textbf{备择假设} H_1 : \mu \neq \mu_0\end{gathered} \tag{41}$$

式中，μ 为次品样品率，μ_0 为总体的次品率均值。

假设显著性水平 α 设定为 5%。

计算检验统计量 Z 计算公式即公式（37）。将得到的 Z 值带入下述公式，可计算 p 值:

$$p = 2 \times \Phi(-|z|) \tag{42}$$

在统计学中，符号 $\Phi(z)$ 通常表示标准正态分布的累积分布函数（CDF）。标准正态分布是均值为 0、标准差为 1 的正态分布，累积分布函数 $\Phi(z)$ 表示随机变量 Z 在标准正态分布中取值小于或等于 z 的概率。

如果 $p \leq \alpha$，则拒绝原假设 H_0，说明数据提供了足够的证据支持备择假设 H_1。如果 $p > \alpha$，则不拒绝原假设 H_0，说明数据没有提供足够的证据拒绝 H_0。

8.2 模型求解与结果分析

我们对抽取的 100 个样本进行质量检测后，记录其中次品的数量为 10 个，此时得到样品次品率 $\widehat{P} = 10\%$。

8.2.1 样本量较大时

计算得到的置信区间为 $[4.12\%, 15.88\%]$，在此区间中随机选取某估计的总体次品率均值测试其是否能通过 Z 检验，如果不通过，则继续随机，直到选取到合法的总体次品率均值。将随机得到的次品率带入问题二和三，求出求各个情况的最优决策。

问题二方案：

	次品率	方案
情况 1	13.52%	1,1,0,1
情况 2	11.24%	1,1,0,1
情况 3	12.71%	1,1,0,1
情况 4	12.56%	1,1,0,1
情况 5	13.90%	1,1,0,1
情况 6	13.08%	1,1,0,1

表 4: 样本量较大时的问题二方案

问题三方案：

次品率：9.27%

是否检测零件 1	是否检测零件 2	是否检测零件 3	是否检测零件 4
0	0	0	0
是否检测零件 5	是否检测零件 6	是否检测零件 7	是否检测零件 8
0	0	0	0
是否检测半成品 1	是否检测半成品 2	是否检测半成品 3	是否拆解半成品 1
1	1	1	1
是否拆解半成品 2	是否拆解半成品 3	是否检测成品	是否拆解成品
1	0	0	0

注：1 表示执行相应操作，0 表示不执行相应操作。

表 5: 样本量较大时的问题三方案

8.2.2 样本量较小时

在样本量较小时，计算得到的置信区间为 [1.79%,40.42%]

问题二方案：

	次品率	方案
情况 1	14.69%	1,1,0,1
情况 2	23.99%	1,1,0,1
情况 3	27.19%	1,1,0,1
情况 4	17.01%	1,1,0,1
情况 5	17.15%	1,1,0,1
情况 6	28.54%	1,1,0,1

表 6: 样本量较小时的问题二方案

问题三方案：

次品率：17.49%

是否检测零件 1	是否检测零件 2	是否检测零件 3	是否检测零件 4
0	0	0	0
是否检测零件 5	是否检测零件 6	是否检测零件 7	是否检测零件 8
0	0	0	0
是否检测半成品 1	是否检测半成品 2	是否检测半成品 3	是否拆解半成品 1
1	1	1	1
是否拆解半成品 2	是否拆解半成品 3	是否检测成品	是否拆解成品
1	0	1	1

注：1 表示执行相应操作，0 表示不执行相应操作。

表 7: 样本量较小时的问题三方案

9 模型的评价与推广

9.1 优点

全面性：论文覆盖了从零配件到成品的整个生产过程，包括检测、拆解、调换等关键环节，具有很强的系统性。这使得模型能够全面反映生产中的各类决策问题，有助于企业进行整体优化。

方法科学：采用了假设检验、成本模型构建等经典的数学建模方法，确保了模型的科学性和严谨性。特别是通过抽样检测方法对次品率的评估，提高了模型对实际生产条件的适应性。

实用性强：模型设计注重实际应用，结合具体的生产流程和成本因素，为企业提供了具有可操作性的生产决策方案。通过模拟仿真验证了不同决策方案的效果，为实际应用提供了指导。

模型扩展性：问题三中模型扩展到了多道工序和多个零配件的生产流程，体现了模型的扩展性和通用性，能够应用于更复杂的生产环境中。

9.2 缺点

假设条件较为理想化：论文中的模型在某些方面可能存在理想化的假设，例如假定次品率是稳定的、生产过程无外部干扰等。这可能导致模型在应对实际复杂情况时的效果有限。

模型复杂性较高：在处理多道工序和多个零配件的情况下，模型的复杂性较高，可能导致计算成本较大。虽然通过简化模型减少了决策方案数量，但仍存在进一步简化或优化的空

间。

对不确定性处理不足：尽管引入了抽样检测方法，但模型对生产过程中可能存在的其他不确定因素（如市场波动、原材料价格变化等）的处理不够深入，这可能影响决策方案的鲁棒性。

10 附件

10.1 代码

这里只展示每问代码中的关键性部分，完整代码请看支撑性材料。

```
alpha = 0.05;
p0 = 0.1;
Z_alpha = norminv(1 - alpha/2);

p_j = 0.1:0.01:0.25;
count =1;
for i=0.1:0.01:0.25
    n(count) = p0*(1-p0)/(((i-p0)/Z_alpha)^2);
    count = count+1;
end
```

第一问代码关键部分

```
% 概率统计
for i=1:m
    n1 = lin1;
    n2 = lin2;
    c1 = x(i,1)*check1*n1; % 检测零件1费用
    c2 = x(i,2)*check2*n2; % 检测零件2费用
    % 检测后零件个数发生改变
    if x(i,1)==1
        n1 = n1*(1-p1);
    end
```

```
if x(i,2)==1
    n2 = n2*(1-p2);
end

n = min(n1,n2); % 装配数量
c3 = n*zhuang; % 装配费用

% 成品次品率
if x(i,1)==1&&x(i,2)==1
    p_c = p3;
elseif x(i,1)==1&&x(i,2)==0
    p_c = p2+(1-p2)*p3;
elseif x(i,1)==0&&x(i,2)==1
    p_c = p1+(1-p1)*p3;
else
    p_c = p1+p2-p1*p2+(1-p1)*(1-p2)*p3;
end



% 拆解成本（拆解费+零件检测费+零件装配费）
n_chai = (p_c*n+p_c^2*n)*x(i,4);
c4 = x(i,4)*(chai*n_chai+(1-x(i,1))*check1*n+(1-x(i,2))*check2
    *n+zhuang*p_c*n);

% 调换成本
n_d = (1-x(i,3))*(p_c*n+x(i,4)*p_c^2*n);
c5 = n_d*shi;

% 收入（好的成品+拆解后好的成品-调换顾客成品）
sum = 56*(n*(1-p_c)+x(i,4)*(1-p_c)*p_c*n-(1-x(i,3))*n*p_c);
```

```
    % 成本
    C = c1+c2+c3+c4+c5;
    W(i) = sum-C;
end

% 流程模拟
% 判断是否循环终止
a = sum(lin1);
b = sum(lin2);
% 这批零件的次品率高于ci,循环终止
if (1-a/size(lin1,1))>ci || (1-b/size(lin2,1))>ci
    break;
end

% 抽取两个零件
index1 = randi(n1-del1,1,1);
flag1 = lin1(index1);
index2 = randi(n2-del2,1,1);
flag2 = lin2(index2);

% 消耗零件组成成品
Sum(k) = Sum(k)+6; % 装配费

% 检测成品
if jue(k,3)==1
    Sum(k) = Sum(k)+check3; % 检测费
    % 是否为成品
    if (flag1&flag2)==1
        t = rand;
        if t<p3
            % 是否拆解
```

```
        if jue(k,4)==1
            Sum(k) = Sum(k)+chai; % 拆解费
            % 是否检测拆解零件
            if jue(k,1)==1
                Sum(k) = Sum(k)+check1;
                if flag1==0
                    lin1(index1)=[];
                    del1 = del1+1;
                end
            end
            if jue(k,2)==1
                Sum(k) = Sum(k)+check2;
                if flag2==0
                    lin2(index2)=[];
                    del2 = del2+1;
                end
            end
        else
            % 零件丢弃
            del1 = del1+1;
            del2 = del2+1;
            lin1(index1) = [];
            lin2(index2) = [];
        end
    else
        good(k)=good(k)+1;
        del1 = del1+1;
        del2 = del2+1;
        lin1(index1) = [];
        lin2(index2) = [];
    end
```

第二问代码关键部分

```
% 半成品1拆解(检测后才能拆解)
    if jue(k,6)==1&&jue(k,8)==1
        t=n_zhuang1*p_c1;
        n_zhuang1 = n_zhuang1*p_ban1;
        Sum(k) = Sum(k)+t*chai1; % 拆解费
        Sum(k) = Sum(k)+t*(jue(k,1)*c(1)+jue(k,2)*c(2)+jue(k,3)*c
            (3)); % 检测零件费
        Sum(k) = t*(8+check1); % 装配成本和检测半成品费
        % 当拆解半成品的个数小于1时，停止循环
        while (t>=1)
            n_zhuang1 = n_zhuang1+t*(1-p_c1);
            t = t*p_c1;
            Sum(k) = Sum(k)+t*chai1; % 拆解费
            Sum(k) = Sum(k)+t*(jue(k,1)*c(1)+jue(k,2)*c(2)+jue(k
                ,3)*c(3)); % 检测费
            Sum(k) = t*(8+check1); % 装配成本
        end
    end
% 成品合格率
if jue(k,6)==1&&jue(k,7)==1
    p_cheng = p;
elseif jue(k,6)==0&&jue(k,7)==1
    p_cheng = p_ban1*p;
elseif jue(k,6)==1&&jue(k,7)==0
    p_cheng = p_ban2*p;
else
    p_cheng = p_ban1*p_ban2*p;
end
p_c3 = 1-p_cheng;
```

```
% 成品拆解
if jue(k,11)==1
    t = n_cheng*p_c3;
    good = p_cheng*n_cheng;
    if jue(k,10)==1 % 工厂检测
        Sum(k) = Sum(k)+t*chai2; % 拆解费
        Sum(k) = Sum(k)+jue(k,6)*check1*t+jue(k,7)*check1*t; %检测
            费
        Sum(k) = Sum(k)+t*(8+check2); % 装配成本和检测成品费
        while(t>=1)
            good = good+t*p_cheng;
            t = t*p_c3;
            Sum(k) = Sum(k)+t*chai2; % 拆解费
            Sum(k) = Sum(k)+jue(k,6)*check1*t+jue(k,7)*check1*t; %
                检测费
            Sum(k) = Sum(k)+t*(8+check2); % 装配成本和检测成品费
        end
    else % 人工检测
        Sum(k) = Sum(k)+t*shi-200; % 调换费
        good =good-1;
        while(t>=1)
            good = good+t*p_cheng;
            t = t*p_c3;
            Sum(k) = Sum(k)+t*chai2; % 拆解费
            Sum(k) = Sum(k)+jue(k,6)*check1*t+jue(k,7)*check1*t; %
                检测费
            Sum(k) = Sum(k)+t*(8+check2); % 装配成本和检测成品费
        end
    end
else
    good = p_cheng*n_cheng;
```

```
end
Sum(k) = 200*good-Sum(k);
```

第三问代码关键部分

```
% 参数设置
n = 100; % 抽样数量
x = 10;  % 样本中的次品数量
alpha = 0.05; % 置信水平（如95%置信水平，alpha=0.05）
% 计算样本次品率
p_hat = x / n;
% 使用正态近似计算置信区间
z = norminv(1 - alpha/2); % z值
error = z * sqrt(p_hat * (1 - p_hat) / n);
low = p_hat - error;
up = p_hat + error;
while true
    p0= low+(up-low)*rand;
    % 计算z统计量
    z = (p_hat - p0) / sqrt(p0 * (1 - p0) / n);

    % 计算p值（双侧检验）
    p_value = 2 * (1 - normcdf(abs(z)));

    % 做出决策
    if p_value <= alpha
        fprintf('拒绝原假设，p值 = %.4f\n', p_value);
    else
        fprintf('不拒绝原假设，p值 = %.4f\n', p_value);
        break;
    end
end
```

```
p =p0

n = 10; % 抽样数量
x = 1;  % 样本中的次品数量
alpha = 0.05; % 置信水平（如95%置信水平，alpha=0.05）
% 计算样本次品率
p_hat = x / n;

z = norminv(1 - alpha/2); % z值
t = sqrt(p_hat*(1-p_hat)/n+z^2/(4*n^2));
up = (p_hat+z^2/(2*n)+z*t)/(1+z^2/n);
low = (p_hat+z^2/(2*n)-z*t)/(1+z^2/n);
```

第四问代码关键部分

10.2 支撑性材料目录

名称	修改日期	类型	大小
第二问情况.xlsx	2024/9/8 18:34	Microsoft Excel ...	10 KB
第三问情况.xlsx	2024/9/8 12:40	Microsoft Excel ...	10 KB
问题二：概率统计.mlx	2024/9/8 17:06	MATLAB Live Sc...	7 KB
问题二：流程图.png	2024/9/7 14:05	PNG 文件	80 KB
问题二：模拟（动态次品率）.mlx	2024/9/8 16:38	MATLAB Live Sc...	11 KB
问题三：概率统计.mlx	2024/9/8 17:32	MATLAB Live Sc...	15 KB
问题四（二）（样本量大）.mlx	2024/9/8 16:25	MATLAB Live Sc...	15 KB
问题四（二）（样本量小）.mlx	2024/9/8 16:31	MATLAB Live Sc...	5 KB
问题四（三）（样本量大）.mlx	2024/9/8 16:24	MATLAB Live Sc...	5 KB
问题四（三）（样本量小）.mlx	2024/9/8 16:32	MATLAB Live Sc...	5 KB
问题四：题二方案(大）.xlsx	2024/9/8 16:26	Microsoft Excel ...	10 KB
问题四：题二方案(小）.xlsx	2024/9/8 14:50	Microsoft Excel ...	10 KB
问题四：题三方案（大）.xlsx	2024/9/8 14:59	Microsoft Excel ...	10 KB
问题四：题三方案（小）.xlsx	2024/9/8 16:33	Microsoft Excel ...	10 KB
问题一：情况二.mlx	2024/9/8 10:28	MATLAB Live Sc...	14 KB
问题一：情况一.mlx	2024/9/8 10:28	MATLAB Live Sc...	15 KB

图 7: 支撑性材料目录